

100 opgaver til Matematik A

Af Mira Backes og Christian Bøgelund

Matematik opgaver

Matematik opgaver	2
Reducér udtrykkene	3
Trigonometri	4
Funktioner	6
Regning med brøker	7
Procentregning	8
Modellering	9
Differentiation	12
Genkend grafer	13
Andengradsligninger	17
Parameterfremstilling	18
Cirklens ligning	19
Bestemmelse af forskrift	20
Integration	21
Monotoniforhold	22
Differentialligning	23
Vektorer	24
Toppunkt	25
Andengradspolynomium	26
Længde af vektor i rummet	27
Prikprodukt	28
Chi i anden test	29
Planer i rummet	30
Funktioner med hjælpemidler	31
Optimering	32
Omdrejningsvolumen	33
Kugleudregning	34
Kvartilsæt og boksplot	35
Tegn grafer og bestem tidspunktet, hvor	37
Bestemmelse af tangent	38

Reducér udtrykkene

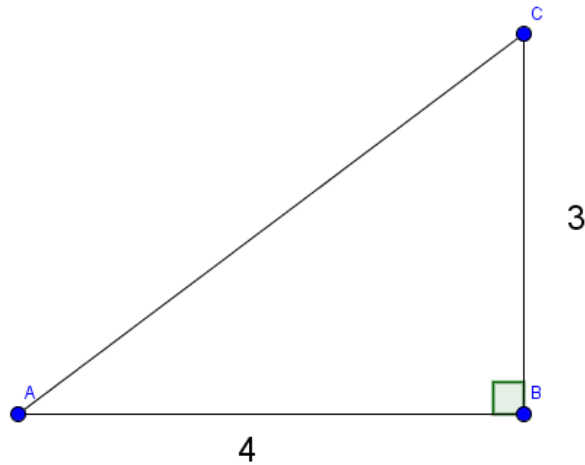
1. $(x + 3)^2 - 9$

2. $(a - 4)(a + 4) + 16 - 4a$

3. $(x - 9)^2 - 81 + 2x$

Trigonometri

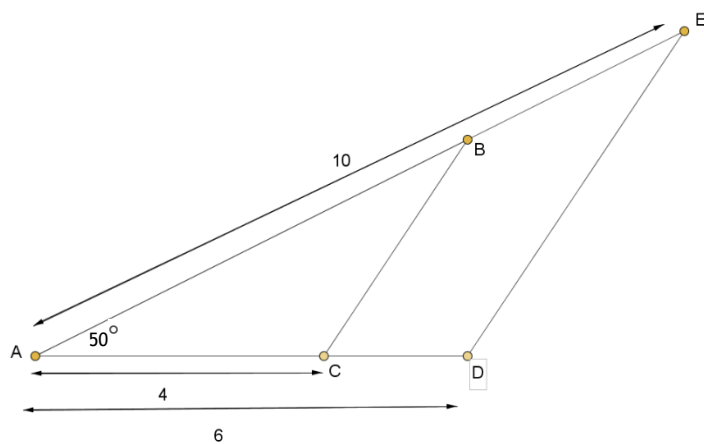
4. Givet trekanten ABC med sidelængderne $A=4$ og $B=3$



Bestem sidelængden C

5. Bestem arealet af ABC

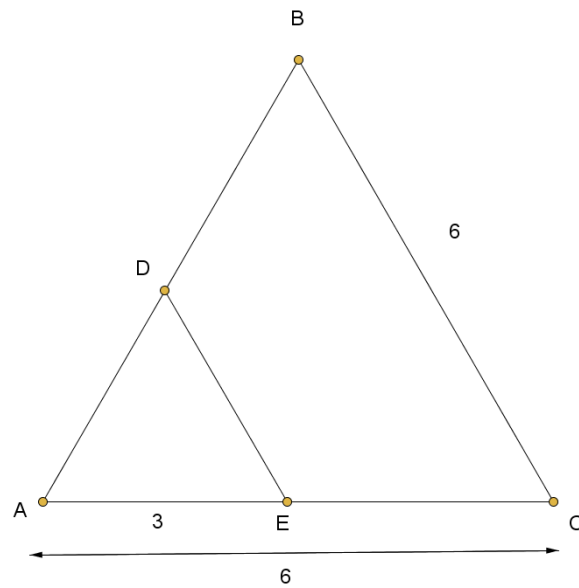
6. Givet trekant ABC og trekant ADE med sidelængderne $AC=4$, $AD=6$ og $AE=10$ og vinkel $A=50^\circ$



Bestem sidelængden DE.

7. Bestem vinkel E.

8. Givet trekant ABC og trekant ADE med sidelængderne $AE=3$, $BC=6$ og $AC=6$.



Bestem længden af linjestykke DE.

9. Bestem arealet af trekant ABC

Funktioner

10. I en model kan udviklingen af antallet af ikke-smartphonebrugere i Danmark beskrives med funktionen $f(x) = 3000 \cdot 0,94^x$, hvor $f(x)$ er det samlede antal ikke-smartphonebrugere (målt i 1000) til tiden x , som er antal år efter 2008. Gør rede for hvad tallene 3000 og 0,94 siger om udviklingen i ikke-smartphonebrugere.

11. I 2010 var omsætningen hos en stor virksomhed 3531 millioner. I de efterfølgende år steg den med 3% hvert år. Indfør passende variable og opstil en model for virksomhedens samlede omsætning.

12. Givet en lineær funktion $y=ax+b$, hvis graf går gennem punkterne $P(1,4)$, $Q(3,6)$. Bestem så a og b .

Regning med brøker

13. Sorter følgende brøker i rækkefølge, hvor den mindste er først:

$$\frac{3}{3} \quad \frac{18}{58} \quad \frac{3}{6} \quad \frac{6}{5} \quad \frac{7}{12}$$

14. Bestem x i følgende udtryk: $\frac{8}{4x} : \frac{2}{1} = 52$

15. En pizza deles blandt 3 mennesker. Person A spiser $\frac{5}{14}$ af pizzaen. Person B spiser $\frac{1}{6}$ af pizzaen. Hvor stor en andel af pizzaen spiser person C, hvis pizzaen bliver spist op?

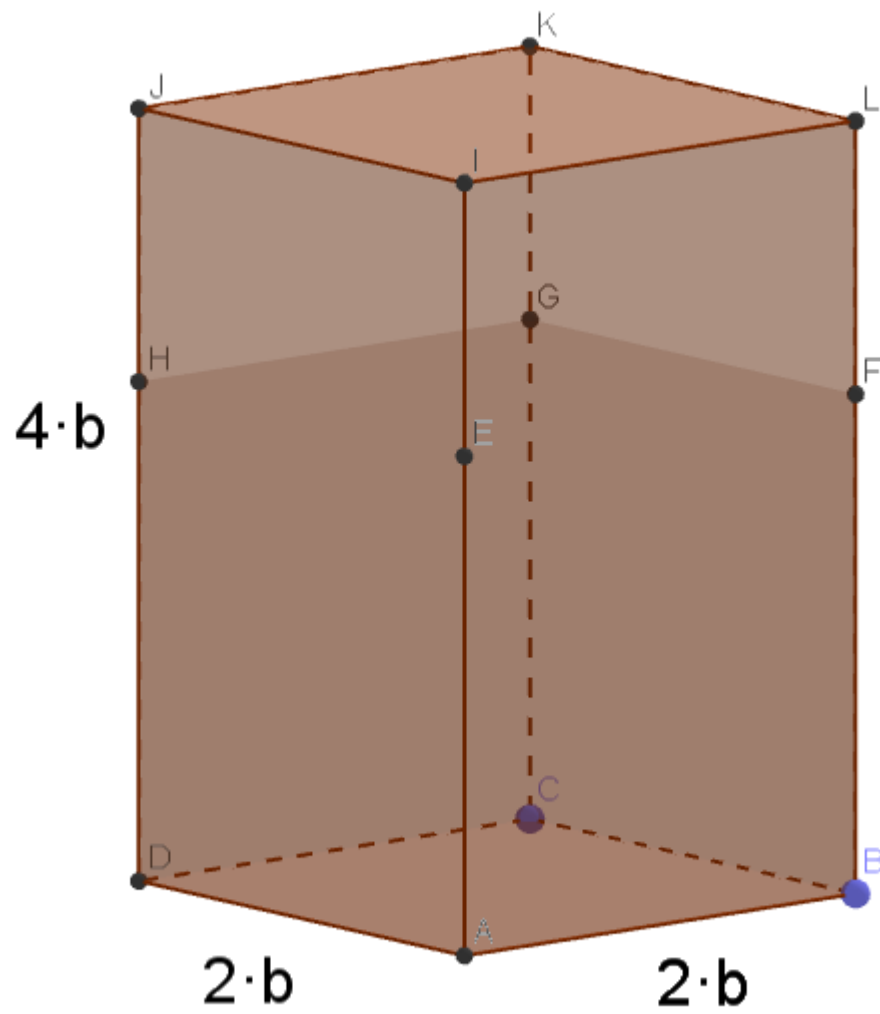
52,38%

Procentregning

16. Givet et par sko, der falder i pris fra 150 til 120 kroner. Hvor stor er den procentvise rabat? Hvor skal den procentvis prisstigning være, før prisen stiger fra 120 til 150?

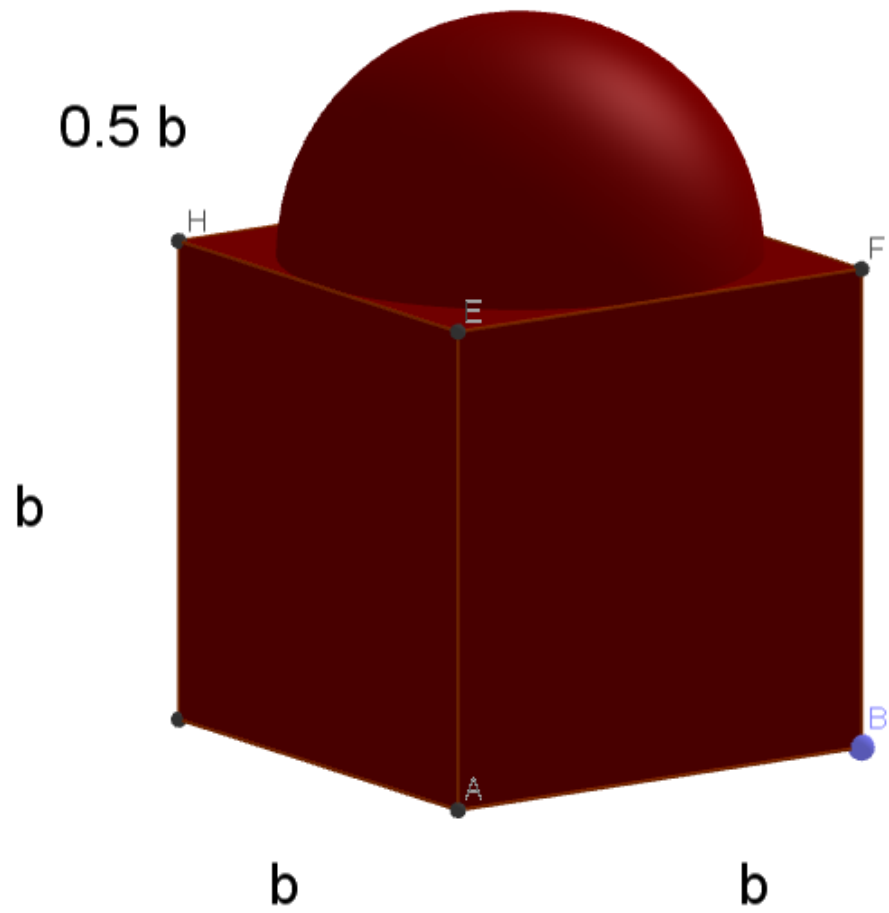
Modellering

17. Givet en kasse med følgende mål:



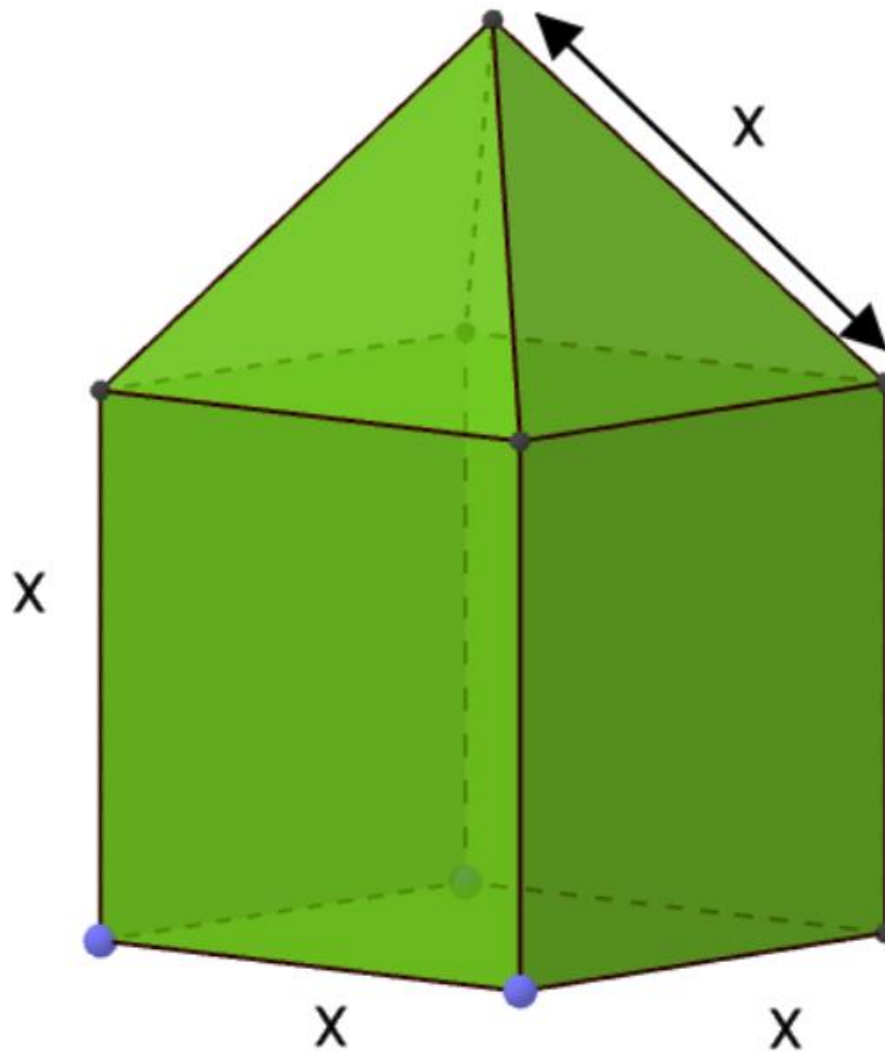
Gør rede for, at kassens rumfang kan bestemmes som $16 \cdot b^3$

18. Givet en figur med følgende mål:



Beskriv figurens overfladeareal ved b .

19. Givet en figur, som ses nedenfor:



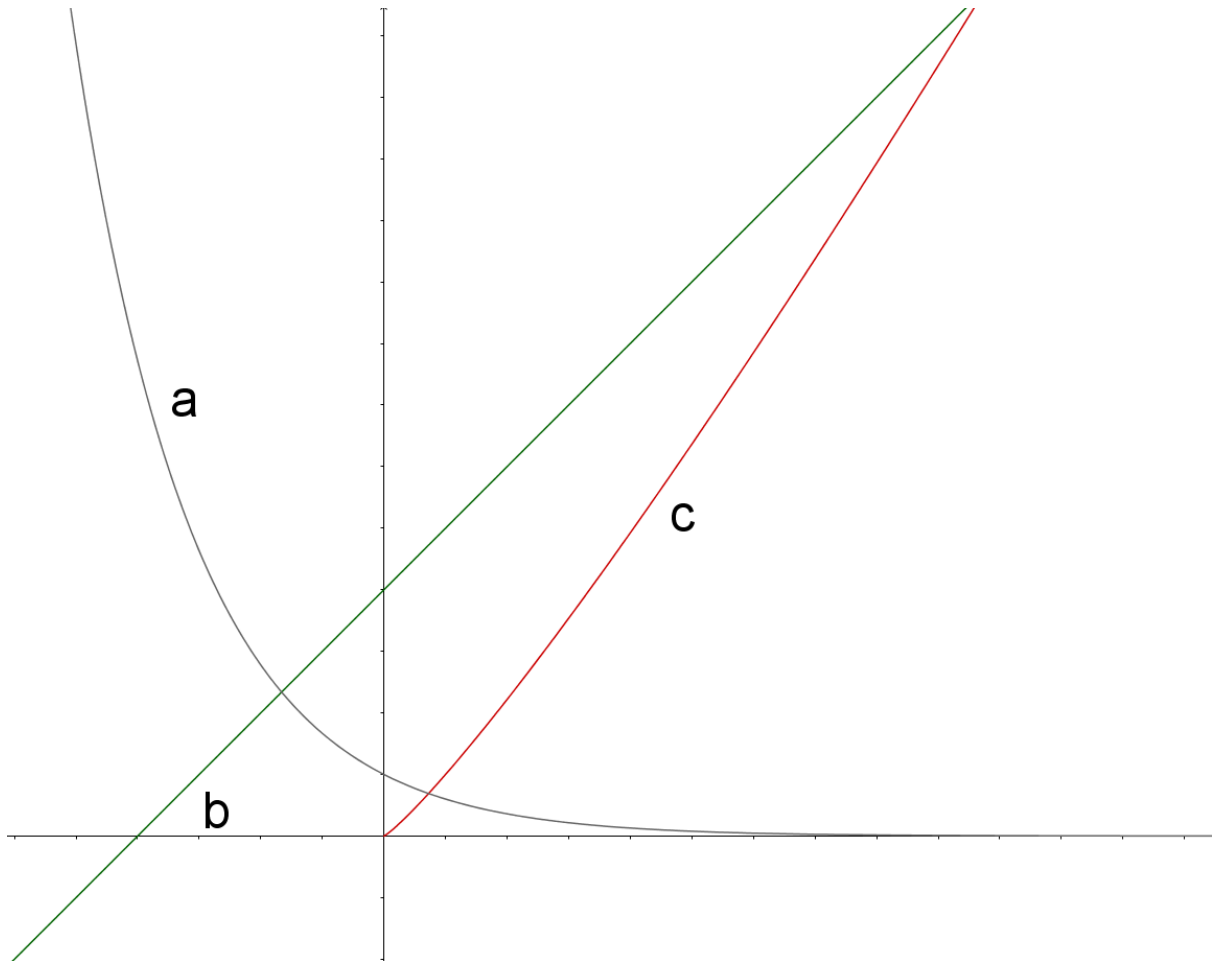
Beskriv figurens rumfang givet ved x .

Differentiation

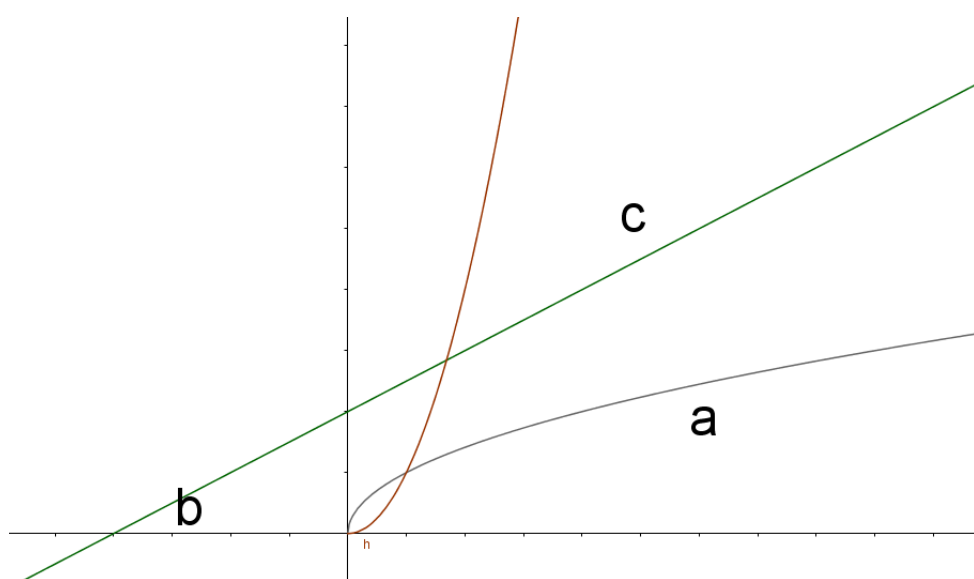
20. En funktion f er givet ved $f(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 17$. Bestem ligningen for tangenten til grafen for f , der går gennem punktet $P(2, f(2))$
21. En funktion f er givet ved $f(x) = 2x^4 + 5x^2 - 6x + 10$. Bestem ligningen for tangenten til grafen for f , der går gennem $P(1, f(1))$
22. En funktion f er givet ved $f(x) = -3x^3 + 20x^2 - 12x + 3$. Bestem ligningen for tangenten til grafen for f , der går gennem $P(3, f(3))$
23. En funktion f er givet ved $f(x) = 2x^3 + 12x^2 - 23x - 9$.
- a) Bestem ligningen for tangenten til grafen for f , der går gennem $P(2, f(2))$

Genkend grafer

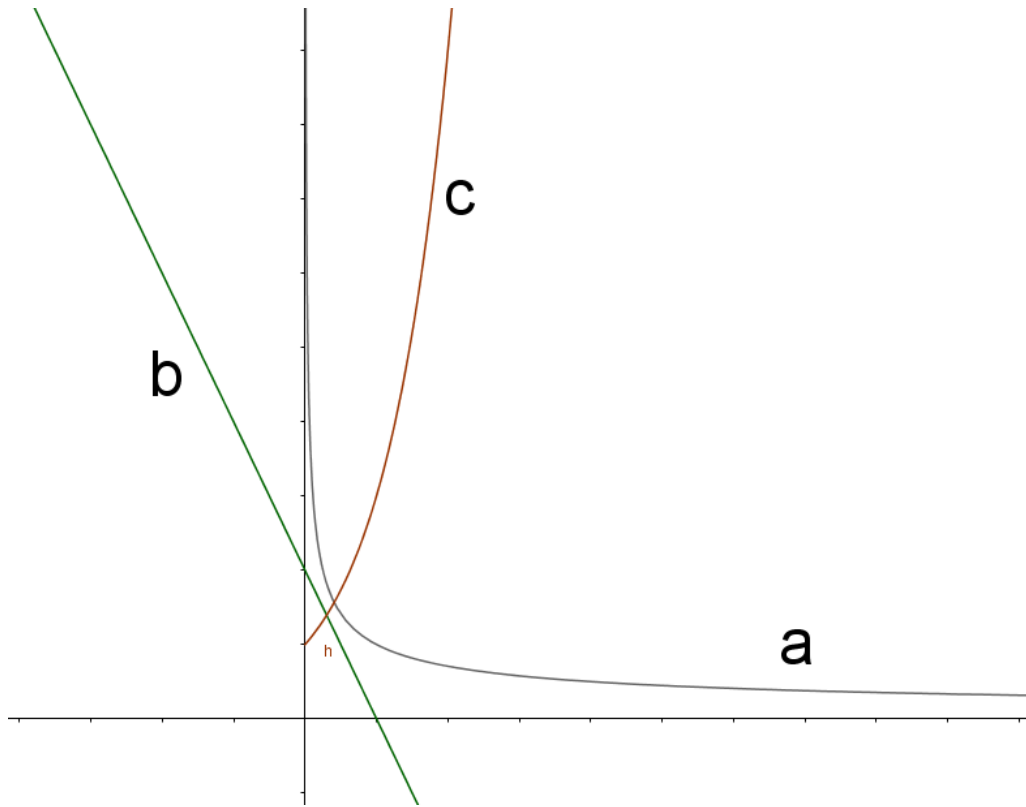
24. I et koordinatsystem ses graferne for A, B og C, der hver er graf for en af de tre funktioner, $f(x) = x + 4$, $g(x) = 0,6^x$ og $h(x) = x^{1,15}$. Gør rede for, hvilken af de tre funktioner de hver især er graf for.



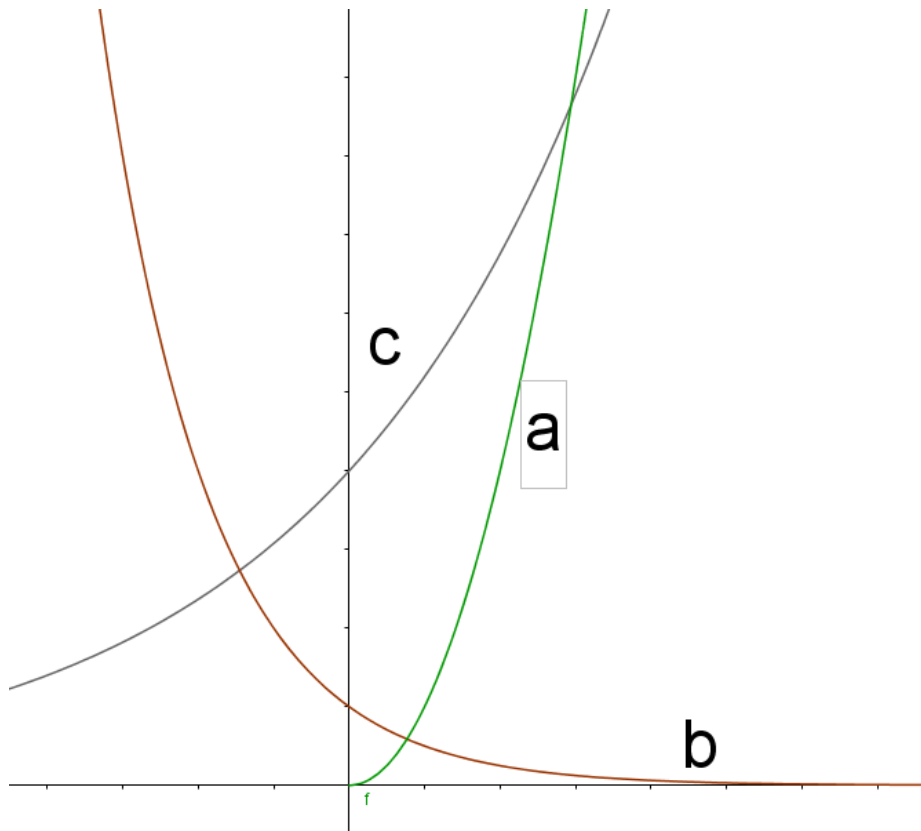
25. I koordinatsystemet nedenfor ses graferne A,B og C, der hver især er graf for en af følgende funktioner: $f(x) = 0,5 \cdot x + 2$, $g(x) = x^{0.5}$ og $g(x) = x^2$. Gør rede for, hvilken af de tre funktioner de hver især er graf for.



26. I koordinatsystemet nedenfor ses graferne a, b, og c, der hver især er graf for en af følgende funktioner: $f(x) = -2x + 2$, $g(x) = x^{-0.5}$ og $h(x) = 3^x$. Gør rede for hvilken af de tre funktioner de hver især er graf for.



27. I koordinatsystemet nedenfor ses graferne a, b og c, der hver især er graf for en af de følgende funktioner: $f(x) = x^2$ $g(x) = 1.3^x \cdot 4$ og $h(x) = 0.5^x$. Gør rede for hvilken af de tre funktioner de hver især er graf for.



Andengradsligninger

28. En andengradsligning er givet ved $x^2 + 25x = 0$. Bestem skæringspunkterne med førsteaksen for ligningens funktion.

29. En parabel er givet ved funktionen $f(x) = 4x^2 + 2x - 1$. Bestem koordinaterne til parablens toppunkt.

30. En funktion f er givet ved $3x^2 - 6x + c = 0$. Bestem c , så andengradsligningen har præcis 1 løsning.

31. En funktion f er givet ved $4x^2 + 8x + c = 0$. Bestem c , så andengradsligningen har præcis 1 løsning

Parameterfremstilling

32. Givet en ligning med ligningen: $4x-9y+2=0$. Opskriv linjens parameterfremstilling.
33. Givet to punkter på en linje, $A = (3,6)$ og $B = (7,1)$. Opskriv linjens parameterfremstilling.
34. En linje l har parameterfremstillingen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in R$. Bestem en parameterfremstilling for den linje m , der går gennem punktet $P(3,7)$ og er vinkelret på l .
35. En linje l har parameterfremstillingen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in R$. Bestem en ligning for den linje m , der går gennem punktet $P(4,1)$ og er parallel med l .

Cirkelns ligning

36. Omskriv ligningen: $x^2 + y^2 - 16x + 4y + 43 = 0$ til cirkelns ligning
37. Omskriv ligningen: $x^2 + 8x + y^2 - 16y + 44 = 0$ til cirkelns ligning
38. Givet ligningen for en bestemt cirkel: $(x + 8)^2 + (y - 5)^2 = 81$. Bestem radius og koordinatsættet til cirkelns centrum.
39. Bestem om linjen $l: y = 2x - 3$ skærer med cirklen $C: (x - 3)^2 + (y - 8)^2 = 64$ og i givet fald hvor mange skæringspunkter.
40. Bestem om linjen $l: -3x + 4 = 0$ skærer med cirklen $C: (x - 4)^2 + (y + 8)^2 = 25$ og i givet fald hvor mange skæringspunkter den har.

Bestemmelse af forskrift

41. Tabellen viser sammenhængen mellem vægten af en type ko i kg og dens brystkasse omfang i cm.

Brystkasse/cm	77	108	138	156	180	200
Vægt/kg	50	100	200	300	550	700

Sammenhængen kan beskrives ved funktionen: $f(x) = b \cdot a^x$

- a) Bestem tallene a og b og beskriv hvad de betyder.
- b) Hvad vejer en ko af den type når brystkassen er 170 cm?

42. Givet en eksponentiel funktion på forskriften $y = b \cdot a^x$ og punkterne P(1,12) og R(3,192). Bestem funktionens forskrift.

43. Et datasæt kan beskrives ved funktionen $y = b \cdot x^a$.

x	1	2	3	5
y	5	20	45	125

Bestem da a og b.

44. Givet en eksponentiel funktion som har forskriften $y = b \cdot a^x$ og punkterne P(2, 6,25) og R(4, 39.0625). Bestem a og b.

45. Givet potensfunktionen $y = b \cdot x^a$ og punkterne P(2,32) og Q(5,500). Bestem a og b.

Integration

46. En funktion f er bestemt ved $f(x) = 7x^3 + 6x^2 + 4x + 4$. Grafen for f afgrænser med ligningen $x=4$ i 1. kvadrant en punktmængde M . Bestem arealet af M .
47. En funktion f er bestemt ved $f(x) = 2 \cdot \sin(1 + x)$. Grafen for f afgrænser med det første skæringspunkt mellem grafen og førsteaksen, en punktmængde M i første kvadrant. Bestem M .
48. To funktioner er givet ved $f(x) = \sqrt{x}$ og $g(x) = x^2$. Bestem arealet af den punktmængde M , der afgrænses af skæringspunktet mellem de to grafer.
49. To funktioner er givet ved $f(x) = x + 3$ og $g(x) = x^3 - 3 + 4$. De to grafer afgrænser sammen med xy -aksen en punktmængde m . Bestem M .

Monotoniforhold

50. Givet funktionen $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 - 3x + 2$. Bestem monotoniforholdene for f .
51. Givet funktionen $f(x) = x^3 - 12x + 1$. Bestem monotoniforholdene for f .
52. Givet funktionen $f(x) = x^3 - 4x + 2$. Bestem monotoniforholdene for f .
53. Givet funktionen $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5 = 0$. Bestem monotoniforholdene for f .

Differentialligning

54. Undersøg, om $y=4x-4$ er en løsning til differentialligningen $\frac{dy}{dx} = 4$.

55. En funktion f er løsning til differentialligningen $\frac{dy}{dx} = 5y - x^2$. Grafen for f går gennem punktet $P(3,5)$. Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P .

56. Undersøg, om $f(x) = x^2 \cdot \ln x + x$ er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot \ln(x) + x + 1$$

57. En type bambus' højde h (i meter) som funktion af tiden t (i døgn) opfylder differentialligningen $\frac{dh}{dt} = 0,75h \cdot (12 - h)$. Til tiden $t=0$ er bambussen 0.2 meter høj. Bestem bambussens højde efter 5 døgn.

Vektorer

58. Givet 2 vektorer \vec{a} og \vec{b} , som er givet ved $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ c \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$. Bestem den værdi for c , der medfører at \vec{a} og \vec{b} er parallelle.

59. Givet 2 vektorer \vec{a} og \vec{b} , som er givet ved $\vec{a} = \begin{pmatrix} -9,5 \\ -10,5 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} c \\ 21 \end{pmatrix}$. Bestem den værdi for c , der medfører at \vec{a} og \vec{b} er parallelle.

60. Givet 2 vektorer \vec{a} og \vec{b} , som er givet ved $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ c \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \end{pmatrix}$. Bestem den værdi for c , der medfører at \vec{a} og \vec{b} er ortogonale.

61. Givet 2 vektorer \vec{a} og \vec{b} , som er givet ved $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Bestem den værdi for c , der medfører at \vec{a} og \vec{b} er ortogonale.

Toppunkt

62. En parabel er graf for funktionen $f(x) = 4x^2 + 5x - 3$ bestem koordinatsættet til parablens toppunkt.

63. En parabel er graf for funktionen $g(x) = -8x^2 - 2x + 3$ bestem koordinatsættet til parablens toppunkt.

64. En parabel er givet ved funktionen $h(x) = -2x^2 - 4x + 6$ bestem koordinatsættet til parablens toppunkt og førstekoordinaten til parablens rødder, hvis der er nogen.

Andengradspolynomium

65. Skitser andengradspolynomiummet givet ved $4x^2 - 5x + 14 = 0$ og forklar hvad tallene 4, 14 samt diskriminanten d har af betydning for grafen.
66. Skitser andengradspolynomiummet givet ved $2x^2 + 7x + 6 = 0$ og forklar hvad tallene 2, 6 samt diskriminanten d har af betydning for grafen.
67. Skitser andengradspolynomiummet givet ved $1x^2 + 8x + 16 = 0$ og forklar hvad tallene 1, 16 samt diskriminanten d har af betydning for grafen.

Længde af vektor i rummet

68. Bestem længden af vektor $\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

69. Bestem længden af vektor $\vec{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$

70. Bestem længden af vektor $\vec{c} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$

Prikprodukt

71. Undersøg om vektorerne $\vec{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$ er ortogonale.

72. Undersøg om vektorerne $\vec{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ og $\vec{d} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$ er ortogonale.

73. Bestem t så $\vec{e} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ og $\vec{f} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ t \end{bmatrix}$ er ortogonale.

Chi i anden test

74. I en undersøgelse er data om forbrug af sociale medier og sammenhængen med aldersgrupper blevet undersøgt. Størrelsen på stikprøven er 598.

I stikprøven skulle de adspurgte svare på om udsagnet: ”Jeg bruger mere end 4 timer dagligt på de sociale medier” er sandt eller falsk vedrørende dem.

	13-18 år	18-23 år	23-30 år
Sandt	205	230	123
Falsk	95	70	175

Opstil en nulhypotese om sammenhængen mellem de sociale medier og aldersgrupper. og undersøg om denne kan forkastes på et 5% signifikansniveau.

75. En klasse besluttede sig for at sammenligne deres karaktererne med naboklassens for at se, om de var bedre eller dårligere.

Klassens karakterer er givet ved:

2.b	00	02	4	7	10	12
Antal elever	3	1	10	6	7	3

Naboklassens karakterer er givet ved:

2.u	00	02	4	7	10	12
Antal elever	5	2	5	10	6	2

Opstil en nulhypotese og afgør om denne kan forkastes på et 5% signifikansniveau.

Planer i rummet

76. Givet følgende koordinater i rummet: $A = (2, 3, 0)$, $B = (8, 6, 0)$ og $C = (5, -1, 3)$.

Bestem en ligning for planen α , der indeholder punkterne A, B og C.

77. Givet koordinatsættet $A = (3, 4, 1)$, $B = (1, 2, 5)$, $C = (-1, 3, -4)$ (RESULTAT: $\alpha: -7x + 13y + 3z = 34$)

78. Givet koordinatsættet $A = (0, 3, 5)$, $B = (2, 5, -1)$ og $C = (3, -1, 4)$ (RESULTAT: $\alpha: -13x - 8y - 7z = -59$)

Funktioner med hjælpemidler

79. Givet funktionen $f(x) = x^{1.2} \cdot 4$. Bestem $f(136)$.

80. Givet funktionen $f(x) = 1,02134x + \frac{12}{61} x^2 - 10,23122$. Bestem $f(294)$.

81. Givet funktionen $f(x) = \frac{258}{3,596 \cdot \cos(0,23^x)}$. Vi skal bestemme $f(12)$

Optimering

82. Bestem det maksimale rumfang en kasse med kvadratisk bund uden låg kan have, når overfladearealet er 500.

83. Bestem det maksimale rumfang en cylinder uden låg kan have, når overfladearealet er 386.

84. Bestem en kugles overfladeareal, når rumfanget er 1150,35.

Omdrejningsvolumen

85. Givet grafen for funktionen $f(x) = -0,05x^2 + 3$, der med første- og anden akse afgrænser en punktmængde M i første kvadrant. Bestem arealet af punktmængden M .
86. Bestem herefter rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360 grader om førsteaksen.
87. Givet grafen for funktionen $g(x) = -2.43x^3 + 10x + 1$, der med første- og anden akse afgrænser en punktmængde M i første kvadrant. Bestem arealet af punktmængden M .
88. Bestem herefter rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360 grader om førsteaksen.

Kugleudregning

89. Givet en kugle $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 = 25$. Bestem kugle centrum samt radius

90. Givet en kugle $(x - 2)^2 + (y - 7)^2 + (z + 10)^2 = 36$. Bestem kugle centrum og beregn hvorvidt punktet A (-3,2, 10, 5) er et punkt i kugle periferi.

91. Givet en kugle $(x + 5)^2 + (y - 5)^2 + (z - 0)^2 = 12,25$. Bestem kugle centrum beregn hvorvidt punktet A (-2,13, 7, 0) er et punkt i kugle periferi.

Kvartilsæt og boksplot

92. Givet en optælling af skostørrelser blandt folkeskoleelever:

42	42	41
44	44	43
42	42	38
38	38	44
43	43	43
38	38	43
39	39	38
38	38	40
43	43	38
41	41	41

Vi skal bestemme kvartilsættene.

93. Givet en optælling af point fra et udspringsstævne:

4	8	3
6	9	2
3	2	7
3	4	7
7	1	8
4	8	9
7	9	7
4	10	1
1	10	4
9	2	8

Vi skal bestemme hvor mange procent der fik 8 point eller derover.

94. Givet en række slag med en 6-sidet terning:

6	6	2
3	4	5
5	2	5
1	6	3
6	4	2
6	6	3
6	6	5
6	2	1
6	3	5
6	3	2

Bestem hvor mange procent af slagene der var lige og middelværdien

Tegn grafer og bestem tidspunktet, hvor

95. Givet funktionen $f(x) = -x^2 + 8x + 4$. Tegn funktionen og bestem x-værdierne, hvor $f(x)=16$.

96. Givet funktionen $f(x) = x^2 - 6x + k$. Bestem den værdi af k, hvor $f(x)$ har én rod og bestem denne rods koordinatsæt.

97. Givet funktionen $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$. Bestem koordinatsættene for funktionens rødder.

Bestemmelse af tangent

98. Givet funktionen $f(x) = -2x^2 + 4x + 10$ og linjen $y = -4x + k$. Bestem den værdi for k , der medfører at linjen y bliver tangent til funktionen $f(x)$ i punktet $(2, f(2))$.

99. Givet funktionen $f(x) = 2x^2 - 7x + 6$ og linjen $y = 9x - k$. Bestem den værdi for k , der medfører at linjen y bliver tangent til funktionen $f(x)$ i ét punkt.

100. Givet funktionen $f(x) = -3x^2 + 10x - 6$ og linjen $y = -2x + 6$. Bestem den værdi for k , der medfører at linjen y bliver tangent til funktionen $f(x)$ i ét punkt.